GUSTAV ADOLFI GÜMNAASIUM

SILVER KERA

11.B KLASS

τ KASUTUSELEVÕTT NING SELLE EELISED π SUHTES

JUHENDAJA: AGU OJASOO

SISSEJUHATUS

Teaduslik maailm on väga muutlik ning püsimatu. Iga päev tehakse mitmeid läbimurdvaid avastusi näiteks bioloogia ning astrofüüsika aladel. Tihtipeale võib jääda mulje, et reaalainetes, mis põhinevad puhtalt vaid loogikal, on kõik juba avastatud ning dokumenteeritud. Kuid siiski on see ekslik mõtteviis. Vahel võib juhtuda, et mõni fundamentaalsematest põhimõtetest, mis on eksisteerinud juba sadu, kui mitte tuhandeid aastaid, lükatakse ümber.

Käesolev uurimistöö käsitleb hiljuti populaarsust kogunud ideed asendada ringi ümbermõõdu ja diameetri jagatisena kirjapandud konstanti π hoopis ringi ümbermõõdu ja raadiuse jagatisena ehk uue konstandina, mida tähistataks τ-ga (hääldatakse „tau"). Matemaatik Mike Keith, kes kord kirjutas π-le pühendatud 10000-sõnalise luuletuse, on öelnud, et π-s mõelda on nagu jõuda sihtmärgini ning avastada, et sa oled alles pool teed läbinud (Bartholomew, 2014). Muudatuse saaks kokku võtta valemiga $\tau = 2\pi$.

Käesoleva uurimistöö eesmärgid on:

- Uurida π ning τ ajalugu.
- Võrrelda π ja τ kasutamist erinevates valdkondades.
- Uurida välja, kuidas suhtuksid τ kasutuselevõttu teised inimesed.

Eesmärkide saavutamiseks püstitati järgnevad uurimisküsimused:

- Mis on τ eelised π suhtes?
- Miks ei ole τ-d kasutusele võetud?
- Mida arvavad GAG-i gümnaasiumiõpilased τ kasutuselevõtust?

Uurimisküsimuste põhjal esitati järgnevad hüpoteesid:

- τ on matemaatiliselt loogilisem ning loomupärasem.
- τ kasutuselevõttu suhtutakse skeptiliselt, kuid pigem siiski leiab idee toetust kui vastupanu.

Käesolev töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis antakse ülevaade π ajaloost. Selles kirjutatakse, kuidas ja mis meetoditega arvutati aastatuhandeid tagasi välja π väärtusi ning kui täpse väärtuseni jõuti. Samuti kirjeldatakse, missugust mõju on avaldanud Šveitsi matemaatik Leonhard Euler π kasutuselevõtule. Kirja on pandud ka lühike ajalugu τ kohta, vähemalt nii palju, kui seda leidub kirjalikes allikates enne 2010. aastat.

Teises peatükis on analüüsitud π asendamist τ-ga erinevates valdkondades nagu matemaatikas geomeetria ning füüsikas pendelliikumine ja radiaanid. Lähemalt on peatutud Euleri valemi juures, millel on samuti oma tähtis roll teemas. Välja on toodud ka niinimetatud ½ argument, mis on üpriski vastuoluline argument, vähemalt veel antud uurimistöö koostamise hetkel.

Kolmandas peatükis on viidud läbi praktiline uuring. Gustav Adolfi Gümnaasiumi gümnaasiumiosa kolmele erinevale klassile paluti täita ankeetküsitlus, kus neil lasti teisendada mõned valemid, kasutades τ-d, ning seejärel avaldada oma arvamust kogu teema osas. Samas peatükis on toodud välja tulemused ning nende põhjal tehtud järeldused, mille abil võib luua üldise pildi suhtumisest τ-sse ja π-sse.

SISUKORD

1. π KASUTUSELEVÕTU AJALUGU

1.1. π arvutamismeetodid

Archimedes Sürakuusast oletas, et π väärtus asetseb $3\frac{10}{71}$ ja $3\frac{1}{7}$ vahel. Seega $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, kust järeldus, et 3.1408… < π < 3.1428… Heron Aleksandriast (kuulsa Heroni valemi autor) väitis, et Archimedes olevat hiljem leidnud veel täpsema väärtuse: $\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$, mis asetab π väärtuse intervalli 3.141590…< π < 3.141601… vahele. (Posamentier & Lehmann, 2004)

Järgnevatel aastatel jõuti aina lähemale π väärtuseni. Aastal 200 eKr leidis Apollonius Pergest, keda peetakse vääriliseks pretendendiks Archimedese tiitlile, π-le täpsema väärtuse kui Archimedes: $\pi \approx 3\frac{177}{1250} = \frac{3927}{1250} = 3.1416$. (Posamentier & Lehmann, 2004)

Astronoom, geograaf ja matemaatik Claudius Ptolemaios kirjutas umbes aastal 150 eKr astronoomilise uurimuse „Almagesti“. Selles kasutas ta kuuekümnendsüsteemi, et saada väärtus $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3\frac{17}{120} = 3.141666... = 3.141\overline{6} \approx 3.14167$ (Posamentier & Lehmann, 2004).

Järgmisena üritab π väärtust kirja panna Leonardo Pisano, paremini tuntud kui Fibonacci. Oma kuulsas teoses „Liber abaci“, mis avaldati aastal 1202, tutvustas ta Euroopale hindu numbrisüsteemi, mida me siiani kasutame (araabia numbrid on tegelikult India päritoluga, kuna araabia numbriteks nimetatakse umbes 1200ndatel aastatel Araabiast Euroopasse imporditud, aga enne seda Indias kasutusel olnud numbreid). Samas teoses on ka tema kuulus jäneseprobleem, millest areneb välja laialt levinud Fibonacci jada. Aastal 1223 kirjutas ta „Practica Geomatrie“, kus ta, kasutades 96-küljelist hulknurka, arvutas π väärtuseks $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3.14\overline{18}$, mille ta leidis, võttes arvude $\frac{1440}{458\frac{1}{5}}$ ja $\frac{1440}{458\frac{4}{9}}$ vahelise aritmeetilise keskmise. Kuigi oma aja kohta polnud Fibonacci eeldus nii täpne kui teistel matemaatikutel, olid tema panused Lääne-Euroopa matemaatika arengule hindamatud, eriti tema eluajale järgneval pimedal keskajal. (Posamentier & Lehmann, 2004)

Järgmine läbimurre π arvutamises tuli aastal 1579, kui prantsuse matemaatik François Viète, kasutades kreeklaste meetodit, võttis $6 \cdot 2^{16} = 393216$ -küljelise hulknurga ja arvutas π väärtuse üheksa tüvenumbri täpsusega. Viète oli ka esimene, kes kasutas niinimetatud lõpmatut valemit, et leida π väärtust: $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots = \frac{2}{\pi}$. Täpsemalt, Viète'i valem leiab $\frac{2}{\pi}$ väärtuse, kust saab kätte π enda, kui leida lõppvastuse pöördväärtus ning seda seejärel kahega korrutada. (Posamentier & Lehmann, 2004)

John Wallis (1616–1703), matemaatikaprofessor Cambridge'i ja Oxfordi ülikoolides, avaldas uue valemi π leidmiseks 1655. aastal oma raamatus „Arithmetica infinitorum". Seal tõi ta välja järgneva valemi π leidmiseks (tegelikult $\frac{\pi}{2}$ valemi, nagu ka Viète leidis $\frac{2}{\pi}$ väärtuse 76 aastat varem, aga see on vaid kahega korrutamise küsimus): $\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$. Antud valem näitab, kuidas korrutis lõpuks võrdub π kahendikuga, kusjuures mida rohkem *n* väärtusi sisaldab valem, seda täpsem tuleb lõpptulemus. (Posamentier & Lehmann, 2004)

Lõpuks jõutigi umbes nelja tuhande aastaga välja arvutada π 1120 tüvenumbri täpsuseni, enne kui võeti appi arvutid, mille järel tüvenumbrite täpsus kasvas astmeliselt. (vt Lisa 1)

1.2 Euler ja tema mõju π-le

1706. aastal kasutas inglise matemaatik William Jones oma raamatus „Synopsis palmariorum matheseos" esimest korda π sümbolit, et tähistada ringi ümbermõõdu ja diameetri suhet. Maailma mastaabis sai π laialt kasutatuks siiski aastal 1748, kui šveitsi matemaatik Leonhard Euler kasutas seda oma raamatus „Introductio in analysin infinitorum". Euler oli tuntud veatu mälu ning komplekssete arvutuste poolest, kaasa arvatud nii mõnegi π valemi väljatöötamise eest, nagu näiteks $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$, mis on huvitav selle poolest, et see on esimene π valem, mis sisaldab harmoonilist rida ehk rida, kus igas murrus on muutuja *n* järgnevast murrust 1 võrra suurem. (Posamentier & Lehmann, 2004)

Võttes arvesse Euleri tohutut mõju matemaatika teadlaskonnale, polnud suureks üllatuseks, kui matemaatikud üle maailma hakkasid tema eeskujul võtma kasutusele π-d kui ringikonstanti.

1.3 τ põgus ajalugu

Pärsia matemaatik Jamshid al-Kashi oli esimene, kes defineeris ringikonstandi kui ümbermõõdu ja raadiuse jagatise. Aastal 1424 arvutas ta oma raamatus „Treatise on the Circumference“ välja selle konstandi 16 tüvenumbrini. Möödus 200 aastat, enne kui Ludolph van Ceulen arvutas antud konstandile välja täpsema väärtuse. (Harremoës, 2012)

Idee kasutada τ-d kui al-Kashi konstanti märkiva sümbolina tõsteti esmakordselt esile Joseph Lindenbergi kirjastamata käsikirjas 1992. aastal. India matemaatik Dhananjay Ostawal väidab, et 1997. aastal üritas ta saada autoriõiguse, et kasutada omega (Ω) sümbolit al-Kashi konstandi tähistamiseks. Tema idee esitati samal aastal India Matemaatikakogukonna konverentsil, kuid erilist populaarsust see ei kogunud. Robert Palais kirjutas aastal 2001 artikli „Pi Is Wrong!“, kus ta samuti nõudis 2π kasutamist π asemel. Sümboliks pakkus ta välja „kolmejalalise π“. Kuna tema sümbolit sai kasutada vaid LATEX koodis, siis see ei saanud eriti laialt levinuks. (Harremoës, 2012)

Joonis 1. Ringikonstandi sümbol Palais’ artiklist „Pi Is Wrong!“ (Hartl, 2013)

Pärast Palais’ artiklit on tulnud mitmeid ideid, kuidas ringikonstanti mugavamalt tähistada, nende hulgas ϖ ning τ. Aastal 2010 andis Michael Hartl välja „The Tau Manifesto“, kus ta propageeris τ kasutuselevõttu ning kuulutas 28. juuni tau päevaks (Ameerika süsteemi järgi 06.28, τ esimesed kolm tüvenumbrit). (Harremoës, 2012)

Lisaks üks huvitav fakt τ päeva kohta: „perfektseks“ numbriks nimetatakse arvu, mille kordajate (välja arvatud arv ise) summa moodustab arvu enda. Esimesed kaks arvu, mis on „perfektsed“, on 6 (3+2+1) ja 28 (14+7+4+2+1). Selletõttu võib τ päeva (06.28), kuigi vaid Ameerika süsteemi järgi, pidada tõeliselt „perfektseks“ päevaks.

Nagu näitas suuline küsitlus Eesti Matemaatikaõpetajate Seltsi konverentsil Tallinna Inglise Kolledžis 21. oktoobril 2014. aastal, teadis 130-st kohal olnud matemaatikaõpetajast konstandi τ tähendust vaid neli inimest ja neistki kaks olid meie kooli õpetajad, kes teadsid seda vaid tänu käesolevale uurimustööle. Seega ilma teadjate protsenti välja toomata võib nentida, et τ teadmine matemaatikaõpetajate hulgas on meie maal erandlik. (Ojasoo, 15.01.2015)

Üleüldiseks põhjuseks, miks juba matemaatika põhimõtte tekkest saati pole kasutatud τ-d kui ringikonstanti, on arvatavasti tolleaegsete mõõteriistade täpsuse tõttu. Kõige otsesemas mõttes oli ringi puhul palju lihtsam täpselt mõõta selle diameetrit kui raadiust. Ning kuna diameetrit peeti ringi defineerivaks suuruseks, siis loodi ka algsed valemid, kaasa arvatud π, selle põhjal.

2. τ KASUTAMINE VALEMITES

2.1 Geomeetria

Tähised:

S = pindala; *r* = raadius; *C* = ümbermõõt; *V* = ruumala; *h* = kõrgus; *m* = koonuse moodustaja.

Ringi pindala ($S = \frac{\tau}{2} r^2$ **või** $S = \frac{\tau r^2}{2}$**):**

Kahjuks tekib siia murrujoon, mida π-d kasutavas valemis $S = \pi r^2$ pole, kuid lõppseisukoht jääb kasutaja otsustada, kas ta peab kahega jagamist liiga tülikaks, nii et pigem ikka eelistada π-d. Teine argument selle toetamiseks oleks, et antud valemi üldkuju on levinud ka muudes geomeetriavälistes tehetes (vt Peatükk 2.4).

Ringi ümbermõõt ($C = \tau r$**):**

Kõige traditsioonilisem näide, kuidas τ teeb elu kergemaks: ringi ümbermõõdu arvutamiseks on vaja korrutada vaid kahte tegurit, millest üks on juba konstant. Kuigi siin võib vaielda ka vastupidiselt: olgu meil ring, mille raadius on nt 50 cm. τ-d kasutades saame me ümbermõõdu kätte tehtega 6.28 × 50, mida ei ole just kõige lihtsam peast arvutada. Aga π-d kasutades oleks meil 2 × 3.14 × 50, mida saaks kirjutada kui 100 × 3.14, mis on juba palju lihtsam tehe. Siiski kõigis teistes aspektides on väljatoodud asendus vaid ajavõidu küsimus.

Kera pindala ($S = 2\tau r^2$**):**

Siin on 4π asendatud 2τ-ga, mis on jälle märkimisväärne vaid peast arvutamise seisukohalt. Teine asjaolu on, et siit saab luua huvitava korrelatsiooni ringi pindalaga. Kui ringi pindala leidmiseks peab korrutama raadiuse ruudu τ kahendikuga, siis kera pindala jaoks peab korrutama selle kahe τ-ga. Ehk kera pindala on neli korda suurem sama raadiusega ringi omast.

Kera ruumala ($V = \frac{2}{3} \tau r^3$ **või** $V = \frac{2\tau r^3}{3}$**):**

Siin ei muutunud valem esteetilises mõttes üldse. Igal juhul jääb murrujoon tehtesse.

Sfääri segmendi pindala ($S = \tau hr$):

Nagu ringi ümbermõõdugagi, sai sellest algsega võrreldes väga lihtne ja puhas valem.

Ringikujulise sektori ruumala ($V = \frac{\tau}{3}hr^2$ või $V = \frac{\tau hr^2}{3}$):

Kaob ära 2π τ kasuks, valem läheb lihtsamaks.

Silindri külgpindala ($S = \tau r(h+r)$):

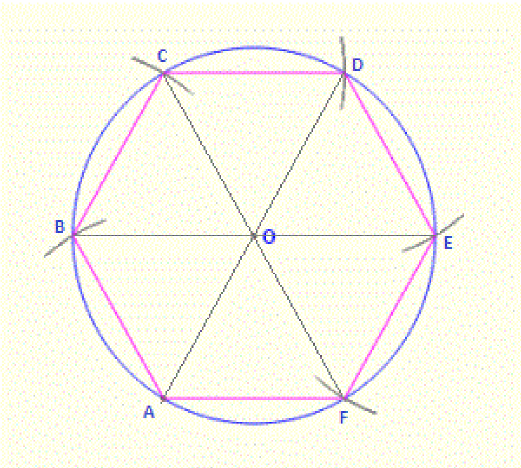
Järjekordselt saab kaotada ära 2π ning asendada τ-ga, mis teeb valemi lühemaks.

Koonuse külgpindala ($S = \frac{\tau}{2}rm$ või $S = \frac{\tau rm}{2}$):

Samasugune lugu nagu ringi pindalagagi, tekib vaid tülikas kahega jagamise vajadus.

2.1.1 τ kasutamine ringikonstandi õpetamisel

Õppekava järgi π-d õppides saab kasutada τ-d, et paremini kinnistada ringikonstandi põhimõtet. Võttes ringjoone, mille raadius on üks ühik, ning sellesse korrapärast kuusnurka konstrueerides (vt Joonis 2) on võimalik näidata, kuidas on tuletatud ringi ümbermõõdu valem.



Joonis 2. Ringjoone sisse konstrueeritud korrapärane kuusnurk (Math Open Reference, 2011).

Kõik joonestamisel moodustatud kolmnurgad on võrdkülgsed, seega A × O = A × B = B × C = C × D = D × E = E × F = F × A = 1 ühik. Kuusnurga ümbermõõt on sellel juhul 6 × 1 = 6 ühikut. Jooniselt on näha, et ringi ümbermõõt peaks olema lähedal kuusnurga omale. Ringi ümbermõõt ongi siis kuus ühikut ja veel natuke peale: kui täpsemalt võtta, siis on see raadiusest pisut üle kuue korra suurem, umbes 2π korda, ja kui veelgi mõistlikum olla, siis τ ≈ 6.28 korda.

Selline meetod on kasutusel mitmete matemaatikaõpetajate poolt põhikooliklassides, et õpilastele kinnistada ringikonstandi olemust. Praegu on sama meetodi tulemusel ringi ümbermõõduks 2π, mis on küll õige, aga mõte ei pruugi mõnele õpetatavale kohale jõuda.

2.2 Füüsika

2.2.1 Pendelliikumine ja harmooniline võnkumine

Pendlit hõlmavates valemites on 2π väga tihti esinev nähtus, kuna see on üks ringliikumise fundamentaalsemaid esinemisvorme. τ-d kasutades saaks kergemalt arvutada välja nii pöördenurga kui ka nurkkiiruse:

$\varphi = \omega t$, $\omega = \tau f$, $\omega = \frac{\tau}{T}$ [*φ* – pöördenurk; *ω* – nurkkiirus; *f* – sagedus; *T* – periood]

Kõiki selliseid võnkumisi, mida saab kirjeldada siinus- või koosinusfunktsiooni abil (võrrandiks $x = x_0 \sin\varphi$), nimetatakse harmoonilisteks võnkumisteks. Siinusfunktsiooni argumendiks olevat suurust $\varphi = \omega t$ nimetatakse võnkumise faasiks. Faasi mõõtühikuks on radiaan ning seda saab avaldada võnkesageduse ja perioodi kaudu: $\varphi = \omega t = \tau f t = \frac{\tau}{T} t$. (Peil, 2012)

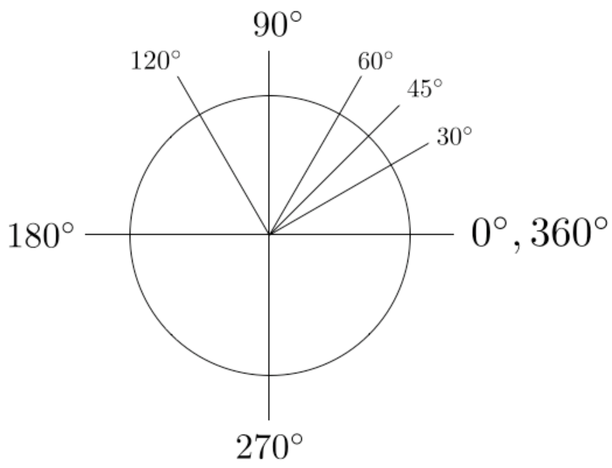
Paljud looduses esinevad võnkumised on harmoonilised või sellele lähedased. Seepärast omab harmoonilise võnkumise võrrand suurt tähtsust. Võrrand võimaldab kirjeldada peaaegu kõiki võnkumisega seotud nähtusi. (Peil, 2012)

Samamoodi esineb τ ka muudes võnkumisliikides, nagu nt matemaatilises pendlis

($T = \tau\sqrt{\frac{l}{g}}$, kus *l* on pendli pikkus ja *g* on Maa raskuskiirendus), vedrupendlis ($T = \tau\sqrt{\frac{m}{k}}$, kus *m* on mass ja *k* on vedru jäikus), füüsikalises pendlis ($T = \tau\sqrt{\frac{I}{mga}}$, kus *I* on keha inertsimoment, m on mass, *g* on Maa raskuskiirendus ja *a* on pöörlemistelje ja masskeskme vaheline kaugus) ja taevakehade tiirlemisperioodis ($T = \tau\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, kus *R* on taevakeha raadius, *G* on gravitatsioonikonstant ja *M* on taevakeha mass). Võnkumist esineb nii heli levimisel kui ka elektripinges (vahelduvvooluvõrgus).

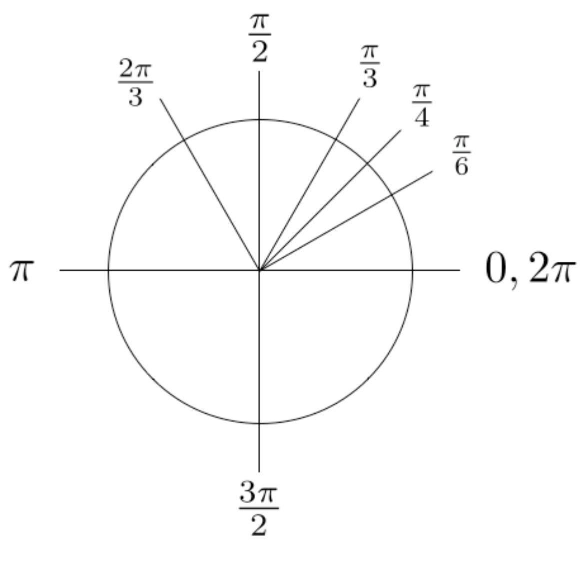
2.2.2 Radiaanid

Kõige elementaarsem nurgasüsteem on kraadisüsteem, millega saab jaotada ringi 360-ks võrdseks osaks, mille hulgast mõned nurgad on „erilisemad“ (vt Joonis 3).



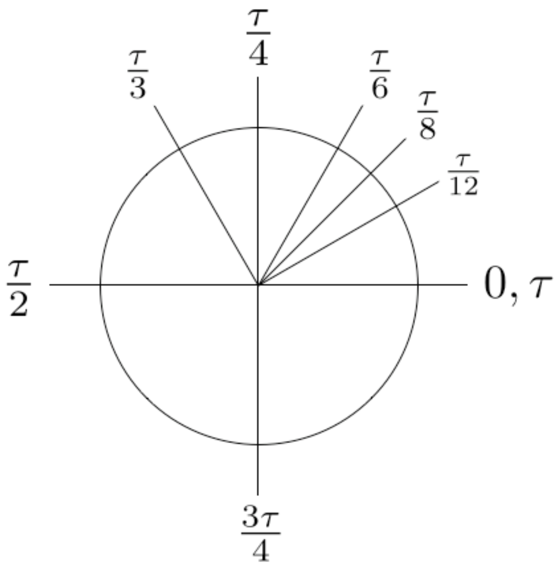
Joonis 3. Erilised nurgad, kraadides (Hartl, 2013).

Füüsikas mõõdetakse pöördenurka mitte kraadides, vaid radiaanides. Üks radiaan (rad) on selline kesknurk, mis toetub kaarele, mille pikkus on võrdne selle ringjoone raadiusega. Ühele täisringile vastab pöördenurk 2π rad, seega 1 rad = $\frac{360°}{2\pi} \approx 57°$. Kasutades selliselt defineeritud nurgaühikut, kehtib pöördenurga ja kaarepikkuse vahel lihtne seos: $\phi = \frac{l}{r}$. (Peil, 2012)



Joonis 4. Erilised nurgad, π-radiaanides (Hartl, 2013)

Joniselt 4 on näha, et ringi täispöördeks on 2π radiaani, pool pööret π radiaani, veerand pööret $\frac{\tau}{2}$ radiaani jne. Kuid kui asendada joonise peal π τ-ga, saame palju loogilisemad vasted:



Joonis 5. Erilised nurgad, τ-radiaanides (Hartl, 2013)

Joniselt 5 on näha, et ringi täispöördeks on nüüd τ radiaani, pool pööret $\frac{\tau}{2}$ radiaani, veerand pööret $\frac{\tau}{4}$ radiaani jne. See defineerib ära ringikonstandi tõelise põhimõtte: pöörde tegemiseks peab läbima nii mitu τ radiaani, kui suurt osa ringist tahetakse läbida.

2.3 Euleri valem

Euleri valem on valem, mis seob eksponentfunktsiooni trigonomeetriliste funktsioonidega. See väidab, et iga reaalarvu *x* korral kehtib $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, kus *i* on imaginaarühik ja trigonomeetrilised väärtused on arvutatud radiaanides. Euleri identiteediks nimetatakse valemit $e^{\pi i} = -1$ või ka $e^{\pi i} + 1 = 0$. (Kaasik, 2002)

Euleri identiteeti peetakse üheks ilusamaks matemaatiliseks valemiks, kuna see hõlmab kolme aritmeetilist operatsiooni: liitmist, korrutamist ja astendamist. Samuti esineb selles viis fundamentaalset matemaatilist konstanti: 0, 1, π, *e* ja *i*.

Asendades Euleri valemis *x*-i τ-ga, saame $e^{\tau i} = \cos(\tau) + i\sin(\tau) = 1 + i \cdot 0 = 1$, seega $e^{\tau i} = 1$, kusjuures võib väita: „Aga siin ei ole 0 esindatud, seega π-ga on valem ilusam!“ Nende meeleheaks võib kirjutada valemi ka järgnevalt: $e^{\tau i} - 1 = 0$.

2.4 Muud valemid

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + ... = \frac{\tau}{8}$$

$S = \tau \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ Pöördkeha pindala

$n! \approx \sqrt{\tau n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ Stirlingi valem

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(X-EX)^2}{2\sigma^2}}$ Normaaljaotus

$\Lambda = \frac{4\tau G}{3c^2}\rho$ Kosmoloogiline konstant

$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\tau}$ Heisenbergi ebakindluse printsiip

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{4\tau G}{c^4} T_{\mu\nu}$ Einsteini väljavõrrand üldrelatiivsusteooria kohta

$F = \frac{|q_1 q_2|}{2\tau\varepsilon_0 r^2}$ Coulomb’i seadus

$\mu_0 = 2\tau \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ Magnetiline konstant ehk magnetiline läbitavus vaakumis

$F = \frac{\tau^2 EI}{4L^2}$ Nõtkumise valem (Wikipedia, s.a.)

Kirja on pandud vaid käputäis valemitest, kus π esineb, ning mis muutuvad märgatavalt lihtsamaks, kui tuua sisse τ. Praeguseks võib olla juba tekkinud selline vaikne mõte, et äkki tõesti, kui 2π esineb nii sageli, siis on matemaatiliselt τ palju loogilisem valik.

2.5 ½ argument

Kuid miks siiski on ringi pindala valem ideaalsem ilma τ-ta? $S = \pi r^2$ on üks tähtsamaid valemeid matemaatikas, Archimedese enda poolt tõestatud, selles esineb π oma täies hiilguses. Kuna ringi pindala valem on põhimõtte poolest ruutvõrrand, võib tuua võrdluseks sarnaseid vorme.

2.5.1 Vabalangemine

Galileo Galilei leidis, et vabalt langeva keha kiirus on võrdeline langemisajaga: $v \propto t$. Võrdekonstant on raskuskiirendus *g*: $v = gt$. Kuna kiirus on asukoha tuletiseks, saab integreerimise teel arvutada läbitud teepikkuse: $s = \int v\,dt = \int_0^t gt\,dt = \frac{1}{2}gt^2$. (Hartl, 14.03.2013)

2.5.2 Potentsiaalne energia vedrus

Robert Hooke leidis, et vedru venitamiseks kuluv elastsusjõud on võrdeline keha pikkuse muutusega: $F \propto x$. Võrdekonstant on deformeeritud keha jäikus *k*: $F = kx$. Seega on potentsiaalne energia vedrus võrdne väliste jõudude poolt tehtud tööga: $E_p = \int F\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$. (Hartl, 14.03.2013)

2.5.3 Kineetiline energia

Isaac Newton leidis, et kehale mõjuv jõud on võrdeline selle kiirendusega: $F \propto a$. Võrdekonstant on mass *m*: $F = ma$. Kineetiline energia on võrdne massi *m* kiirendamisel kiirusele *v* tehtud tööga: $E_k = \int F\,dx = \int ma\,dx = \int m\frac{dv}{dt}dx = \int m\frac{dx}{dt}dv = \int_0^v mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2$. (Hartl, 14.03.2013)

2.5.4 Seos ringi pindalaga

Ringi ümbermõõt on võrdeline selle raadiusega: $C \propto r$. Võrdekonstant on τ: $C = \tau r$. Kasutades siin samasugust meetodit nagu eelpool, saame $S = \int d\,S = \int_0^{\tau} C\,dr = \int_0^{\tau} \tau r\,dr = \frac{1}{2}\tau r^2$ (Hartl, 14.03.2013).

Identse ülesehitusega valemeid leidub rohkemgi: tiirlemisenergia ($\frac{I\omega^2}{2}$), jõumomendi potentsiaalne energia ($\frac{k\theta^2}{2}$), elektrivälja energiatihedus ($\frac{\varepsilon E^2}{2}$), kondensaatori mahtuvus ($\frac{CU^2}{2}$), magnetvoo tihedus ($\frac{\mu H^2}{2}$) ning induktiivsus ($\frac{LI^2}{2}$) (Lindenberg, 12.02.2015).

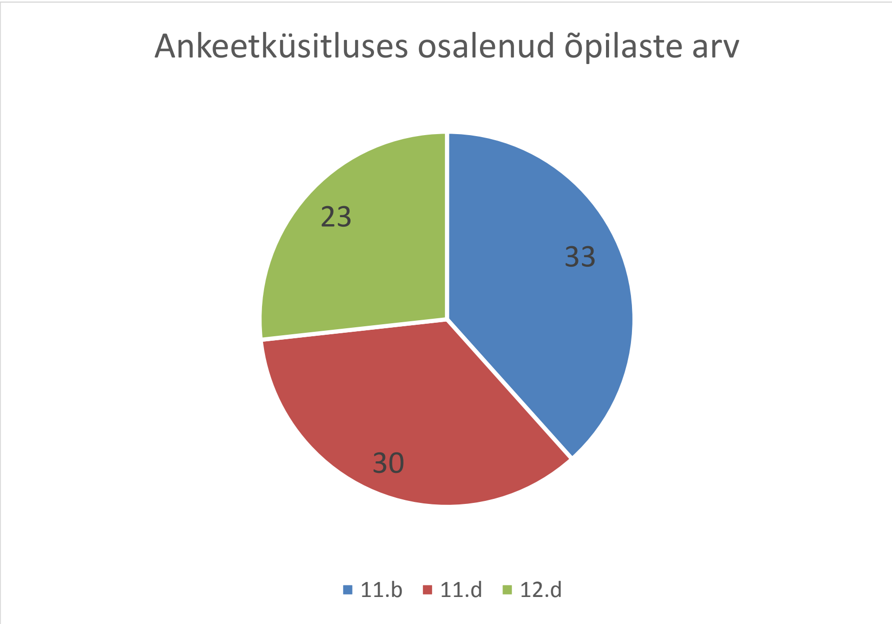
Kõik leitud valemid on oma vormi poolest sarnased: konstant on korrutatud muutujaga ruudus ning seejärel jagatud kahega. Kui üksnes ringi pindala oleks säärane, siis tõesti ei oleks head põhjendust valemit niiviisi kujutada. Kuid nagu näha, esineb samasugune vorm ka tähtsamates füüsikavalemites. See peaks olema üpriski veenev põhjendus, et $S = \frac{\tau r^2}{2}$ on kõige loomulikum viis panna kirja ringi pindala valemit.

3. UURIMUS ÜLDISE ARVAMUSE KOHTA τ KASUTUSELEVÕTUST GUSTAV ADOLFI GÜMNAASIUMI GÜMNAASIUMIOSA KLASSIDE SEAS

3.1 Metoodika ning valim

Uurimistöö autor viis läbi ankeetküsitluse paberkandjal, jagades 11.b, 11.d ja 12.d klasside rühmatundides õpilastele kätte töölehe (vt Lisa 2), kus nad pidid ümber kirjutama π-d sisaldavad valemid, kasutades τ-d. Geomeetria puhul pole valemeid ette antud, see on juhendaja soovil, et 12. klass saaks korrata neid valemeid enne matemaatika riigieksamit. Eelnevalt joonistas autor tahvlile valemi $\tau = 2\pi$ ning rääkis, miks ta uurib antud teemat ja mis selle põhimõte on. Töölehe lõpus oli esitatud kaks küsimust τ kasutuselevõtu kohta, kus lasti õpilastel vastata 5-palli süsteemis ning palutud neil soovi korral täpsustada oma seisukohta.

Kokku vastas küsitlusele 86 õpilast: 33 õpilast 11.b klassist, 30 õpilast 11.d klassist ning 23 õpilast 12.d klassist (vt Joonis 6). 11.b ja 11.d puhul viis uurimistöö koostaja läbi ankeetküsitluse rühmatundides, 12.d-le jagas ankeedid kätte uurimistöö juhendaja Agu Ojasoo.



Joonis 6. Ankeetküsitluses osalenute arv

3.2 Uurimistulemused ja nende analüüs

3.2.1 Esimene küsimus

Kõige positiivsemat keskmist tagasisidet küsimusele „Mida te arvate, kui π-d hakataks asendama τ-ga?“ andis 11.d klass, kus nende arvamuse võib kokku võtta väärtusega 3, mis on võrdne väitega „suhtun neutraalselt“.

Kõige negatiivsem keskmine tagasiside tuli 11.b klassilt, kus nende tulemuseks saadi $2.\overline{60}$, mida võib lõpuks ümardada väärtusele 3, ehk samuti nõustutakse väitega „suhtun neutraalselt“.

3.2.2 Teine küsimus

Küsimusele „Mida te arvate, kui algusest peale oleks π asemel kasutusel τ (et me oleksime sellega juba harjunud ning mingeid muudatusi ei pea läbi viima)?“ andis samuti kõige positiivsema keskmise tulemuse 11.d klass, kus vastuseks saadi 3.73, mida võib ümardada väärtusele 4 ehk „pigem pooldan“.

Kõige negatiivsem keskmine tagasiside tuli 11.b klassilt, kus tulemuseks saadi 3.57, mida võib ümardada väärtusele 4, ehk nõustutakse väitega „pigem pooldan“.

	Küsimus 1	**Küsimus 2**
11.b	2.606061	3.575758
11.d	3	3.733333
12.d	2.793651	3.650794

Joonis 7. Keskmised tulemused esitatud küsimustele klasside kaupa.

	Küsimus 1	**Küsimus 2**
11.b	2	3
11.d	3	4
12.d	2	3

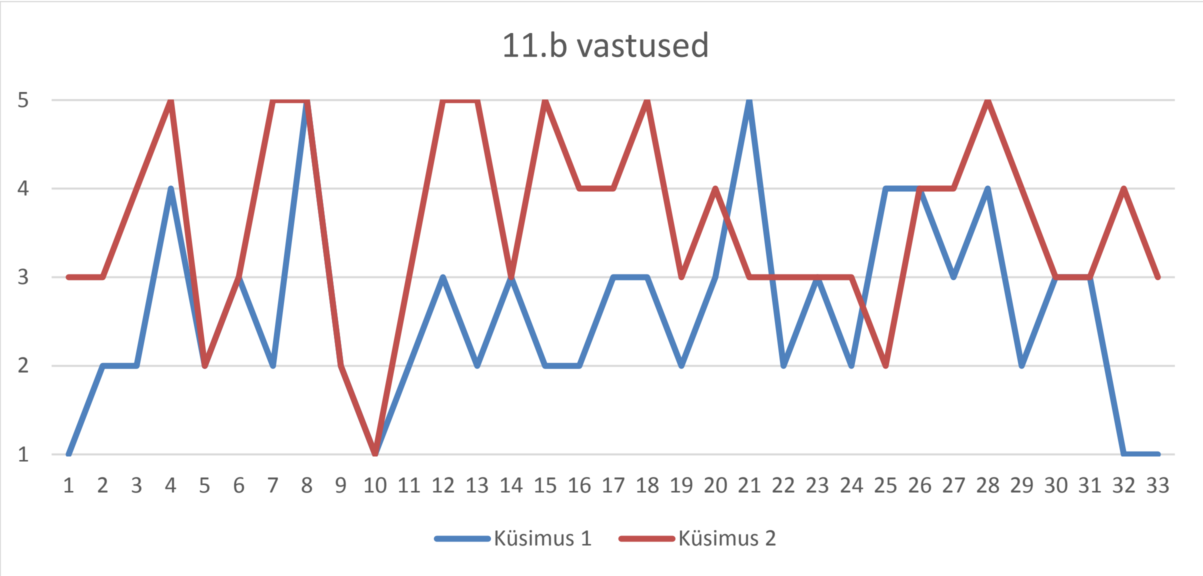
Joonis 8. Esitatud küsimuste tulemuste mediaanid klasside kaupa.

3.2.3 Üldpilt

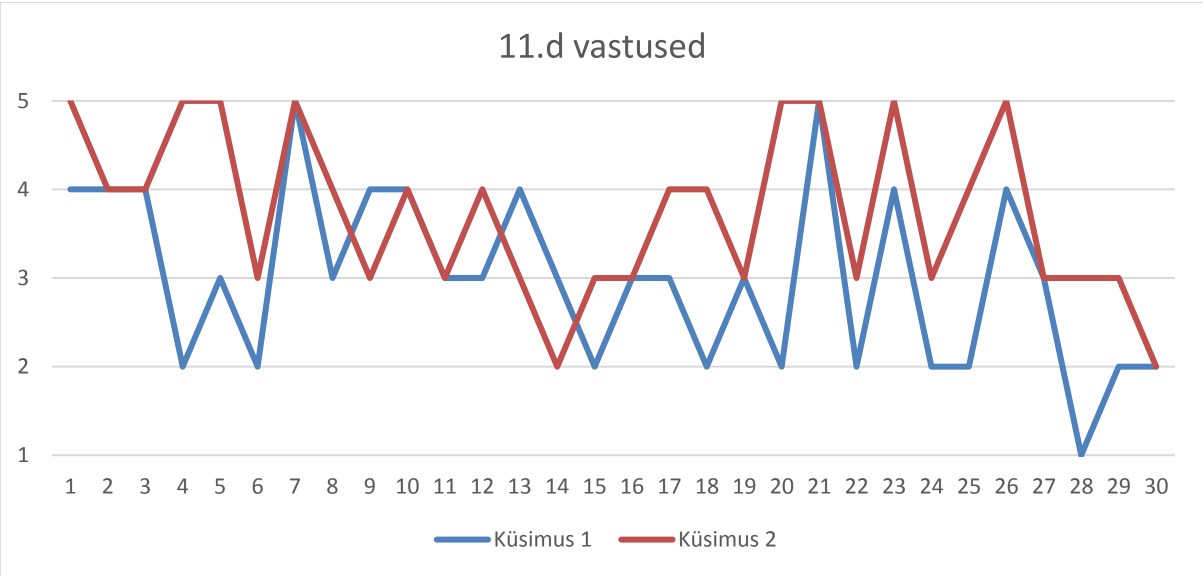
Kõikide klasside vastuseid kokku võttes ning ühtlaselt tulemusi uurides saime esimesele küsimusele keskmise väärtuse 2.67, mida võib ümardada väärtuseni 3 ehk „suhtun neutraalselt“. Teisele küsimusele saime keskmise 3.51, mida võib ümardada väärtuseni 4 ehk „pigem pooldan“.

Kuigi 11.b ja 12.d andsid mõlemale küsimusele ühe palli võrra madalama hinnangu kui 11.d klass, moodustab siiski kõikide klasside arvamus kokku keskmise tulemuse, mis annab ümardades samad tulemused, mis oli 11.d klassil.

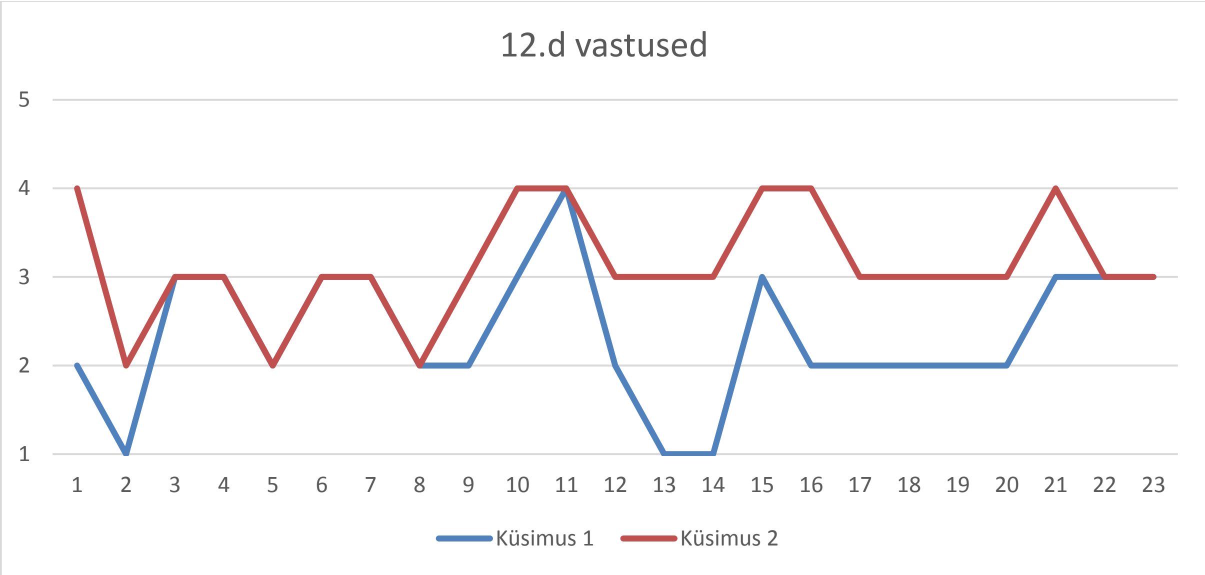
Saadud vastuste graafikuid vaadeldes ilmnes trend: umbes 90% juhtudel vastati teisele küsimusele kas võrdse või kõrgema tulemusega kui esimesele küsimusele. Samuti ilmneb, et väärtusega „1“ vastati kummalegi küsimusele palju vähem kordi kui väärtusega „5“ (erandiks võivad jääda 12.d vastused, kus ei vastatud kummalegi küsimusele väärtusega „5“).



Joonis 9. 11.b klassi vastused küsimustele 1 ja 2.

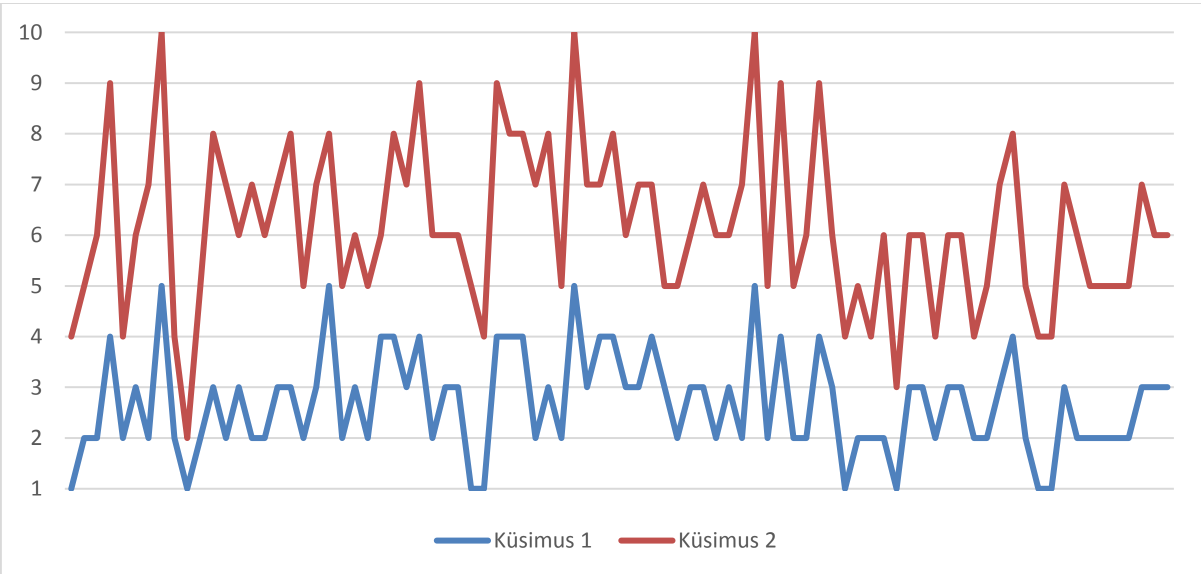


Joonis 10. 11.d klassi vastused küsimustele 1 ja 2.



Joonis 11. 12.d klassi vastused küsimustele 1 ja 2.

Kõigi kolme klassi vastuste ühtlaseks analüüsiks on koostatud joongraafik (vt Joonis 12), kus on vaadatud vastuseid kahe kaupa, kusjuures teise küsimuse väärtusi on korrutatud kahega, et oleks võimalik vaadelda moodustuvaid jooni ka eraldi. Graafikut jälgides ilmneb asjaolu, et esimese ja teise küsimuse väärtused on suhteliselt võrdsed, ja kui ei ole, siis enamjaolt on teise küsimuse väärtus kõrgem. Seega oli järeldus, milleni jõuti alapeatükis 3.2.3 ja mis põhines klasside graafikuid eraldi vaadates, tõsi ka kõiki kolme klassi korraga vaadates.



Joonis 12. 11.b, 11.d ja 12.d vastused küsimustele 1 ja 2 kokkuvõetult.

3.3 Uurimise käigus tekkinud argumendid

„Me oleks võinud põhikoolis sellist asja õppida."

„Saan hakkama nii π kui τ-ga. Kui keerulistes valemites lihtsustaks see arvutamist, siis las asendavad."

„Kui meil aastaid tagasi oli veel EEK ja tuli EUR, oli alguses muidugi raske ümber mõelda jne. Aga noh, kõigega on võimalik harjuda."

„Kuigi valemid muutuvad lihtsamaks, oleks raskem ümber õppida ja läheks sassi, samas uues õppekavas miks mitte."

„Mul vahet pole, aga õpikute kirjutajad ei oleks vast õnnelikud, kui kõike ümber tegema peavad hakkama."

„Tundub mõttetu tegevus, kuid see $S = \frac{\tau r^2}{2}$ on tõesti tüüpiline valemi üldkuju."

„Äkki me tahaks sellisel juhul τ asemel π-d kasutada? Minu silmis võiks säärases olukorras esitada sarnaseid argumente nagu teil praegu."

„Hetkel oleks õpilastel väga halb hakata ümber õppima. Aga kui õpetada noorele generatsioonile, siis võib sellest asja saada. Aga ei oska öelda, kas see on vajalik."

„Kui see teeb arvutamise lihtsamaks, siis pooldan. Aga π-st võõrandumine (õpetajad, õpikud, õppekava) oleks väga ajamahukas ja kulukas."

„Kui juba algusest oleksime kasutanud, siis sa küsiksid seda π kohta!"

„Kui hakatakse õpetama ainult seda ja mitte π-d, siis OK! Aga, samas on π-l suur ajalugu ja ei sooviks, et see ära kaoks!"

„Kui ma saaks aru, miks see hea on, siis võib-olla pooldaks."

„Siis oleks täiesti ükskõik. Sellega on sama, et kui olen õppinud autoga sõitma, mis manuaal, siis edaspidi kerge, aga õppides automaadiga on manuaaliga sõit esialgu harjumatu."

„Ma usun, et see oleks geniaalne idee, nähes, kuidas nii paljud inimesed ei ole teadlikud π alternatiivist valemites."

„Ei oska sellist olukorda ette kujutada, võib-olla mõtleksin siis, miks peab kaks eraldi sümbolit olema, kui üht on võimalik teise kaudu väljendada."

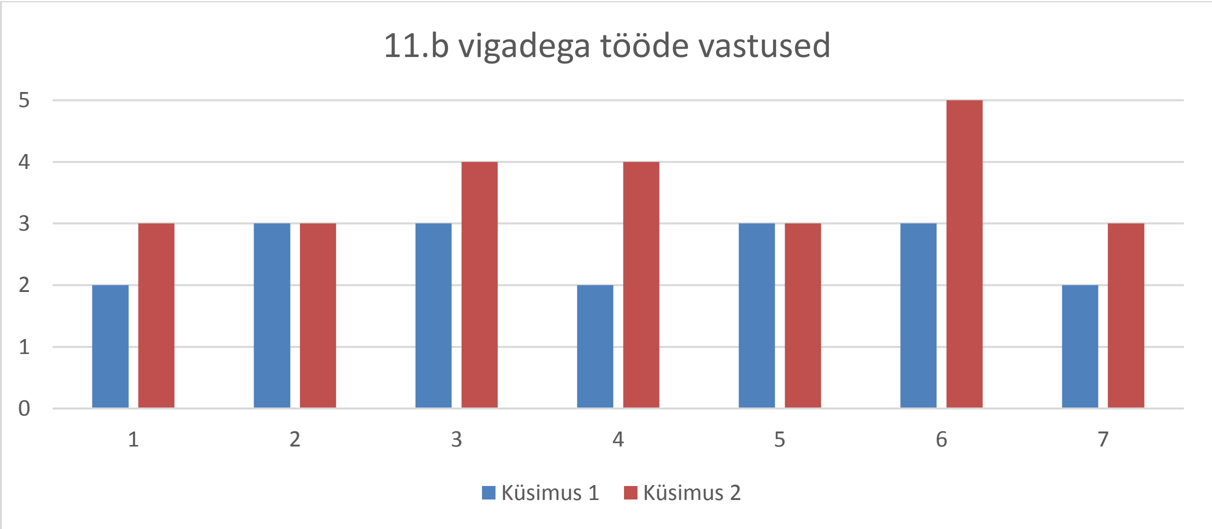
„Ei oska öelda, arvestades, et ise olen harjunud π süsteemiga ning see tundub mulle loogiline. Pigem olen seisukohal, et pole erilist vahet, kas õpitakse π või τ süsteemi järgi, niikaua kui kasutatakse vaid ühte süsteemi.“

3.4 Valemite teisendamisel tihti esinevad vead

Ankeetide täitmise käigus esines nii mitmeidki vigu, mis võisid õpilastele jätta vale mulje τ kasutamisest ning selle vajalikkusest. Kui enamjaolt võis vigades süüdistada hooletust või kiirustamist, siis nii mõnegi puhul oli näha, et õpilane ei mõistnud teisendamise põhimõtet või üldse valemi loomust. Lihtsamaid hooletusvigu, nagu kera ruumala valemis raadiuse ruudu kasutamist kuubi asemel, pole mõtet välja tuua, sest need ei lisa antud uurimusele väärtust. Nendes töödes, kus esineb vigu, saab välja uurida, kas esineb korrelatsioon teisendamise kvaliteedi ning τ-le antud hinnangu vahel.

3.4.1 11.b

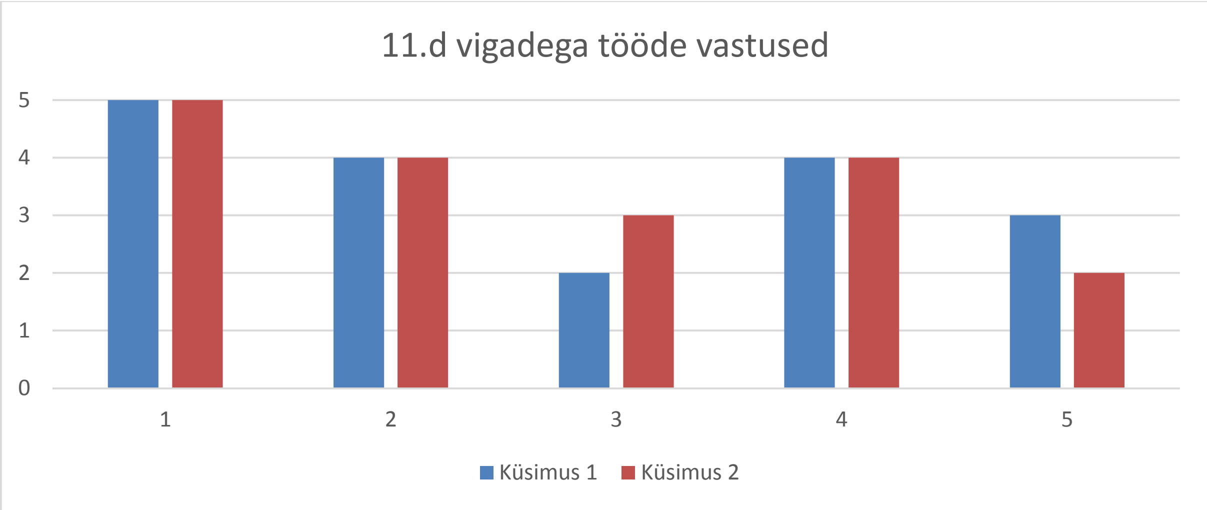
11.b küsitlustes leidus seitse tööd ehk 21.2 %, kus esines teisendamise käigus tekkinud vigu (vt Joonis 13). Nende tööde keskmised väärtused esimesele ja teisele küsimusele olid vastavalt 2.57 ja 3.57, mis on peaaegu samaväärsed kogu klassi keskmistega.



Joonis 13. 11.b klassi vigadega tööde vastused.

3.4.2 11.d

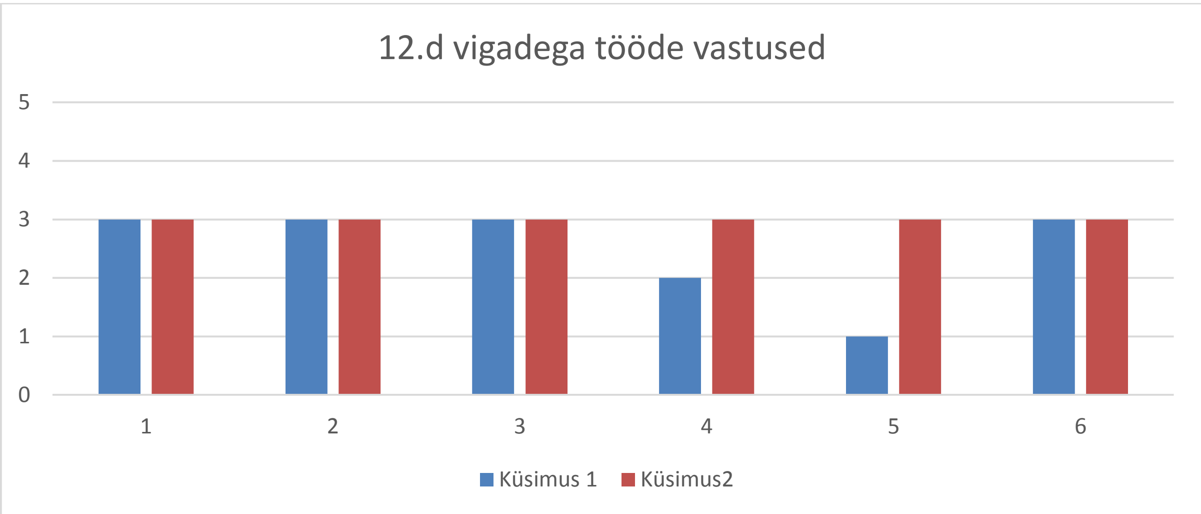
11.d küsitlustes leidus viis tööd ehk 16.7 %, kus esines teisendamise käigus tekkinud vigu (vt Joonis 14). Nende tööde keskmised väärtused esimesele ja teisele küsimusele olid mõlemal juhul 3.6, mis on esimese küsimuse puhul kõrgem kogu klassi keskmisest ning teise küsimuse puhul sellele väga lähedane väärtus.



Joonis 14. 11.d klassi vigadega tööde vastused.

3.4.3 12.d

12.d puhul võisid tulemusi moonutada mitu tööd, kus oli täidetud vähem kui pool ankeedist. Küsitluste hulgas leidus kuus tööd ehk 26.1 %, kus esines kas vigu teisendamisel või jäeti rohkem kui pooled valemid teisendamata (vt Joonis 15). Nende tööde keskmised väärtused esimesele ja teisele küsimusele olid vastavalt 2.5 ja 3, mis on esimese küsimuse puhul lähedal kogu klassi keskmisele, kuid teise küsimuse puhul on väärtus palju madalam.



Joonis 15. 12.d klassi vigadega tööde vastused.

3.5 Järeldused

Vaadates tehtud küsitluse tulemusi, ilmneb, et Gustav Adolfi Gümnaasiumi õpilased suhtuvad τ kasutuselevõttu pigem erapooletult ehk nad ei oleks otseselt selle vastu, kuid samuti ei kipu nad seda pooldama. Selline tulemus võib tuleneda asjaolust, et kuigi τ kasutamine peaks justkui hõlbustama matemaatilisi tehteid, siis ümberharjumine kujuneks väga suureks katsumuseks.

Kui Gustav Adolfi Gümnaasiumi õpilased suhtuvad τ kasutuselevõttu pigem erapooletult, siis idee, et τ oleks olnud kasutusel kohe π asemel, võeti vastu suurema poolehoiuga. Õpilaste arvamust võib kokku võtta väitega „pigem pooldan“. Selle põhjal saab oletada, et õpilased nõustuvad väitega, et τ on tegelikult loogilisem konstant. Ainsaks takistuseks on tõesti ümberharjumine, mis on täiesti arusaadav, sest see nõuaks kogu matemaatilise maailma ümberkorraldamist.

Sama järeldust toetab fakt, et teisendamisel tekkivad raskused ei olnud τ kasutuselevõtu kohta arvamuse kujunemisel mõjutavaks faktoriks. Nendes töödes, milles esines vigu, anti τ kohta klassi keskmisega põhimõtteliselt võrdsed hinnangud. Seega võib tõdeda, et isegi kui teisendamine osutus keeruliseks ning tülikaks, oldi üksmeelel, et see on siiski muudatus, mille peale tasub mõelda.

Võttes arvesse mitmeid kommentaare, mis töödele lisati, siis nendest tuli välja erinevaid vaatenurki, mille peale töö koostaja polnudki varem mõelnud. Näiteks analoog eurole üleminekuga 2011. aastal või võrdlus autoga sõitmisel manuaalse ja automaatkäigukasti vahel. Esimesel juhul nõustuti, et nagu eurogagi, küll me ära harjume. Teisel juhul arutati, kuidas ühelt teisele üle minna on lihtne, kuid vastupidi keeruline.

Esines ka mitmeid huvitavaid väiteid, nagu näiteks, et kui τ oleks kogu aeg kasutusel olnud, siis toimuks samasugune uurimus π kohta. See on mõtlemapanev vaatepunkt ning arvatavasti üks paremaid, mis on τ vastu. Teine õpilane väitis, et tema nooremal õel oleks lihtsam õppida, kuigi ta ise loodab, et tema ei pea seda õppima. See on samuti tähtis punkt kogu τ põhimõttes: õpetamine. Kui π kaotamine oleks tülikas kõigile, kes on juba sellega harjunud, siis seejuures võib τ lihtsustada elu hoopis nendel, kes alles hakkavad vastavaid teemasid õppima. Kahjuks on see juba omaette teema, mis käesolevasse uurimistöösse ei mahu.

KOKKUVÕTE

Käesolev uurimistöö lähtus probleemist, et praegu kasutusel olevat ringikonstanti π-d tahetakse asendada uue konstandiga, mis on π-st kaks korda suurem ning mida nimetataks τ-ks. Selle analüüsiks vaadati π ajalugu, võrreldi τ kasutust valemites ning viidi läbi praktiline töö, et kindlaks määrata gümnaasiumiõpilaste suhtumine antud ideesse.

π ajalugu uurides tuli välja, et juba 4000 aastat tagasi avastati, et ükskõik millise ringi ümbermõõtu ja diameetrit jagades saab alati ühe ja sama arvu. Muidugi, mõõtevahendeid arvestades ei olnud võimalik anda sellele väga täpset väärtust. See tähendab, et juba tollest ajast peale peeti diameetrit ringi defineerivaks suuruseks. Väga keeruline on öelda, mille põhjal on säärane väide tehtud, kuid just tänu sellele ongi kogu idee π-st saanud alguse.

Analüüsides matemaatilisi valemeid, kus on π asendatud τ-ga, tuli välja, et 2π on tihti esinev suurus. τ kasutamine hõlbustas geomeetrilisi valemeid, füüsikas radiaane ning võnkumist ja Euleri identiteet sai täiesti uudse kuju. Samuti sai ära põhjendatud üks tihti esinevamaid argumente τ vastu ehk ringi pindala valem väitega, et selline valemi kuju on palju rohkem esindatud mitmetes teistes valemites, seega just see on matemaatiliselt loogilisem lähenemisviis.

Gustav Adolfi Gümnaasiumi gümnasistide hulgas läbi viidud ankeetküsitluse tulemusena selgus, et õpilased on suhteliselt ükskõiksed τ kasutuselevõtu osas, nad ei avaldanud erilist poolehoidu ega vastuhakku. Samas oldi pigem nõus väitega, et τ oleks pidanud võetama kasutusele juba kohe π asemel. Nende tulemuste põhjal võib järeldada, et kui veelgi rohkem levitada ideed τ kohta ning selle põhimõtteid, oleks üleminek isegi variant, mille peale tasuks tulevikus mõelda.

KASUTATUD ALLIKAD

Bartholomew, R. C. (25.06.2014). Why Tau Trumps Pi. Scientific American. http://www.scientificamerican.com/article/let-s-use-tau-it-s-easier-than-pi/ (12.02.2015).

Beckmann, P. (1971). A History of Pi. New York: The Golem Press.

Harremoës, P. (03.03.2012). Al-Kashi's constant τ. http://www.harremoes.dk/Peter/Undervis/Turnpage/Turnpage1.html (11.01.2015).

Hartl, M. (2013). Some special angles, in degrees [Joonis]. http://www.tauday.com/assets/figures/degree-angles.png (10.01.2015).

Hartl, M. (2013). Some special angles, in pi-radians [Joonis]. http://www.tauday.com/assets/figures/pi-angles.png (10.01.2015).

Hartl, M. (2013). Some special angles, in radians [Joonis]. http://www.tauday.com/assets/figures/tau-angles.png (10.01.2015).

Hartl, M. (14.03.2013). The Tau Manifesto. http://www.tauday.com/tau-manifesto (19.10.2014).

Hartl, M. (2013). The strange symbol for the circle constant from “Pi Is Wrong!” [Joonis]. http://www.tauday.com/assets/figures/palais-tau.png (10.01.2015).

Kaasik, Ü. (2002). Matemaatikaleksikon. Tartu: Atlex.

Lindenberg, J. Tau Before It Was Cool. https://sites.google.com/site/taubeforeitwascool/ (12.02.2015)

Ojasoo, A. (15.01.2015) [Isiklik intervjuu].

Peil, I. (2012). Mehaanika. Füüsika õpik gümnaasiumile. Tallinn: Maurus.

Posamantier, A.S. & Lehmann, I. (2004). Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number. New York: Prometheus Books.

Reimand, J. & Velsker, K. (1999). Valemeid matemaatikast. Tallinn: Koolibri.

Ringjoone sisse konstrueeritud korrapärane kuusnurk. [Joonis]. http://www.mathopenref.com/constinhexagon.html (12.03.2015)

Wikipedia – List of formulae involving pi. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_formulae_involving_%CF%80 (24.12.2014)

LISA 1. Tabel erinevatest väljaarvutatud π väärtustest 2000 a. eKr kuni arvutite kasutuselevõtuni

Kelle poolt	Millal	Tüvenumbrite täpsus	Leitud väärtus (välja kirjutatud kuni 35-kohalised väärtused)
Babüloonlased	~2000 eKr	1	3.125 = 3 + 1/8
Egiptlased	~2000 eKr	1	$3\frac{13}{81} \approx 3.16$
Hiinlased	~1200 eKr	1	3
Piibel (Esimene Kuningate raamat, 7:23)	~550 eKr	1 (4)	3 (3.1416)
Archimedes	~250 eKr	3	3.1418
Vitruvius	15 eKr	1	3.125
Hon Han Shu	130 pKr	1	$3.1623 \approx \sqrt{10}$
Ptolemaios	150	3	3.14166
Wang Fau	250	1	$3.15\bar{5} = \frac{142}{45}$
Liu Hui	263	5	3.14159
Siddhanta	380	3	3.1416
Tsu Chung Chi	480	7	$3.1415929 \approx \frac{355}{113}$
Aryabhata	499	4	$3.1416 = \frac{62832}{20000}$
Brahmagupta	640	1	$3.1623 \approx \sqrt{10}$
Al-Khowarizmi	800	4	3.1416
Fibonacci	1220	3	3.141818
Al-Kashi	1430	12	3.1415926535898732
Otho	1573	6	3.1415929
Viète	1593	9	3.1415926536
Romanus	1593	15	3.141592653589793
van Ceulen	1596	20	3.14159265358979323846

van Ceulen	1615	35	3.14159265358979323846264338327950 29
Newton	1665	16	3.1415926535897932
Sharp	1699	71	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	
Takebe	1723	41	
Matsunaga	1739	50	
Von Vega	1794	140	
Rutherford	1824	208	
Strassnitzky / Dase	1844	200	
Clausen	1847	248	
Lehmann	1853	261	
Rutherford	1853	440	
William Shanks	1873	707	
Ferguson	1946	620	
Ferguson	Jan 1947	710	
Ferguson & Wrench	Sep 1947	808	
Smith & Wrench	1949	1120	

LISA 2. Eksperimendi ankeet

Kirjutage välja valemid või täpsed väärtused, kasutamata π-d!

Klass:

Ringi pindala:

Ringi ümbermõõt:

Kera pindala:

Kera ruumala:

1 rad (kraadides):

1 täispööre (radiaanides):

0.5 täispööret (radiaanides):

Normaaljaotus ($y = \varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$):

Coulomb'i seadus ($F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$):

Mida Te arvate, kui π-d hakataks asendama τ-ga?

1 – täielik jama 2 – pigem ei poolda 3 – suhtun neutraalselt 4 – pigem pooldan 5 – väga hea mõte

Täpsustage, kui soovite:
………
……..
……..
………………………………………………………………………………………………

Mida Te arvate, kui algusest peale oleks π asemel kasutusel τ (et me oleksime sellega harjunud juba ning mingeid muudatusi ei pea läbi viima)?

1 – täielik jama 2 – pigem ei poolda 3 – suhtun neutraalselt 4 – pigem pooldan 5 – väga hea mõte

Täpsustage, kui soovite:
………
……..
……..
………………………………………………………………………………………………

Tänan!

LISA 3. Teisendamisel esinevad vead klasside kaupa

11.b

0.5 täispööret (radiaanides) = 0.5 π rad = 0.25 τ rad (hinded 2 ja 3)

Ringi ümbermõõt = πr = $\frac{\tau}{2} r$ (hinded 3 ja 3)

Ringi pindala = $\frac{\tau}{2} \pi r^2$ ja ringi ümbermõõt = $\tau\pi$ (hinded 3 ja 4)

Kera ruumala = $\frac{4}{3}\pi r^3 = 1.5\tau r^3$ ja 1 rad puudu (hinded 2 ja 4)

Kera ruumala = $\frac{3}{4}\pi r^3 = \frac{3}{8}\tau r^3$ (hinded 3 ja 3)

1 täispööre = 0.5 τ rad ja 0.5 täispööret = 0.25 τ rad (hinded 3 ja 5)

1 täispööre = 0.5 τ rad ja 0.5 täispööret = 0.25 τ rad (hinded 2 ja 3)

11.d

Kera pindala = $\frac{\tau}{2} r^3$ ja kera ruumala = $\frac{\tau}{3} r^3$ (hinded 5 ja 5)

1 täispööre = $\frac{\tau}{2}$ rad ja 0.5 täispööret = 180 kraadi (hinded 4 ja 4)

Praktiliselt täitmata töö (hinded 2 ja 3)

1 täispööre puudu ja $\frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{|q_1 q_2|}{8\tau\varepsilon_0 r^2}$ (hinded 4 ja 4)

Praktiliselt täitmata töö (hinded 3 ja 2)

12.d

Praktiliselt täitmata töö (hinded 3 ja 3)

1 rad = 180 ° (hinded 3 ja 3)

1 täispööre = 2 rad ja 0.5 täispööret = 1 rad (hinded 3 ja 3)

1 rad = 2τ (hinded 2 ja 3)

Praktiliselt täitmata töö (hinded 1 ja 3)

Praktiliselt täitmata töö (hinded 3 ja 3)